1. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych $(a, b)$, dla których ciąg $(10, a, b, ab)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2. W kwadrat o polu $S$ wpisano okrąg, a następnie w ten okrąg wpisano trójkąt równoboczny o polu $P$. Oblicz $\frac{S}{P}$.

3. W sklepie ze słodyczami sprzedawane są cukierki, batoniki i lizaki. Na ile sposobów można kupić dokładnie sześć słodyczy, jeżeli chcemy kupić co najmniej po jednym każdego, ale co najwyżej dwa lizaki?

4. Kuba pisał egzamin z fizyki, który składał się z 10 pytań, na które można było odpowiedzieć jedynie "TAK", albo "NIE". Test został zaprojektowany w taki sposób, że jeżeli Kuba odpowie na dowolne pięć pytań "TAK", a na pozostałe pięć "NIE", zawsze będzie mieć co najmniej cztery poprawne odpowiedzi. Na ile sposobów można stworzyć taki test?

5. Znajdź najmniejszą wartość parametru $a$, dla której nierówność $x \geqslant 14\sqrt{x} - a$ jest spełniona dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych $x$.

6. W równoległoboku $ABCD$ prosta przechodząca przez punkt $C$ przecina bok $AB$ w punkcie $E$, przy czym zachodzi $EB = \frac{1}{5}AE$. Odcinek $CE$ przecina przekątną $BD$ w punkcie $F$. Wyznacz stosunek $BF : BD$.

7. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste $x$ takie, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $y$ zachodzi równość $8xy - 12y + 2x - 3 = 0$.

8. Na ile sposobów można ułożyć liczby $-8, -7, \ldots, 7, 8$ tak, aby wartość bezwzględna liczb w otrzymanym ciągu była niemalejąca?

---

9. W trapezie $ABCD$ (gdzie podstawami są $AB$ i $CD$) zachodzi $2\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$. Mamy również $CD = 3$ i $DA = 5$. Oblicz długość $AB$.

---

10. Planety $X, Y, Z$ krążą wokół jednej gwiazdy po koncentrycznych orbitach kołowych (wspólnym środkiem okręgów jest ta gwiazda). Poruszają się ze stałą prędkością, a ich okresy obiegu wokół gwiazdy wynoszą odpowiednio $60, 84$ i $140$ lat. Pewnego razu zdarzyło się, że wszystkie trzy planety wraz ze swoją gwiazdą leżały na jednej prostej. Za ile lat planety wraz ze swoją gwiazdą po raz kolejny ustawią się na jednej prostej?

---

11. Pierwiastkami równania $x^2 + ax + b = 0$ są liczby $a$ i $b$. Wyznacz wszystkie możliwe pary $(a, b)$.

---

12. Oblicz $\frac{\tan^2 58^\circ - \sin^2 58^\circ}{\tan^2 58^\circ \sin^2 58^\circ}$.

---

13. Oblicz

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}}{\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}}$$

---

14. Dany jest ciąg $a_n$, w którym $a_2 = 5$, a $a_n = \lfloor \frac{n^2}{a_{n-1}} \rfloor$ dla $n > 2$. Oblicz $a_{2025}$.

15. Uprość wyrażenie

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}$$

16. $ABCDE$ jest pięciokątem foremnym. Wewnątrz niego wybrano punkt $P$ taki, że $ABP$ jest trójkątem równobocznym. Ile wynosi $\sphericalangle PEC$?

17. W turnieju szachowym wzięło udział 13 szachistów. Każdy z nich grał z każdym pozostałym dokładnie raz. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy z nich wygrał sześć partii oraz przegrał sześć partii, żadna partia nie zakończyła się remisem. Na ile sposobów można wybrać trzech szachistów z owych trzynastu tak, aby każdy z nich odniósł jedno zwycięstwo i jedną porażkę w partiach przeciwko pozostałym dwóm wybranym do tej trójki szachistom?

18. Funkcja $f$ dla każdego $x$ rzeczywistego dodatniego zadana jest wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot x$. Spośród całkowitych wartości funkcji $f$, jaka jest jej największa możliwa wartość dwucyfrowa?

19. Niech dany będzie okrąg $\omega$ o środku w punkcie $S$ i promieniu 1. Wybierzmy punkt $P$ taki, że $PS = 3$. Poprowadźmy styczne do $\omega$ z punktu $P$, które dotykają go w punktach $A$ i $B$. Niech teraz $Q$ będzie dowolnym punktem na krótszym łuku $AB$ i poprowadźmy styczną do $\omega$ w punkcie $Q$. Owa styczna przecina odcinki $AP$ i $BP$ odpowiednio w punktach $X$ i $Y$. Oblicz obwód trójkąta $PXY$.

20. Filip dostał na Wielkanoc szachownicę $8 \times 8$, w której brakuje dwóch pól: lewego dolnego rogu oraz prawego górnego rogu. Na ile sposobów Filip może postawić na szachownicy osiem wież tak, aby żadne nie atakowały się nawzajem?

21. W trójkącie $ABC$ zachodzi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 42^\circ$. Niech $\omega$ będzie okręgiem o środku $O$, który przecina bok $AB$ w punktach $P, Q$, bok $BC$ w punktach $R, S$, a bok $CA$ w punktach $T, U$. Oblicz $\sphericalangle COB$, jeżeli $PQ = RS = TU$.

22. Jaką resztę z dzielenia przez $2^7 - 1$ daje liczba $2^{9999} - 1$?

23. Znaleźć największą liczbę całkowitą, która dzieli liczbę $m^5 = 5m^3 + 4m$ dla każdego $m \geqslant 10$.

24. W kwadrat $ABCD$ o boku 1 wpisano kwadrat $KLMN$ w taki sposób, że $K, L, M, N$ leżą odpowiednio na bokach $AB, BC, CD, DA$. Punkty $X, Y, Z$ leżą na odcinkach $AB, KN, DA$ w taki sposób, że $AXYZ$ jest kwadratem. Oblicz pole $AXYZ$, jeżeli pole $KLMN$ wynosi $S$.

25. Trójkąt $ABC$ ma kąt prosty przy wierzchołku $A$. Na boku $AB$ leży punkt $D$, przy czym $CD = 1$. $E$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z $A$ na $BC$. Oblicz $AD$, wiedząc, że $BD = BE = 1$.

26. Zbiór $X$ ma $n$ elementów. Niech $A, B$ będą dwoma losowo wybranymi podzbiorami $X$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $A$ jest podzbiorem $B$? Zakładamy, że prawdopodobieństwo wyboru każdego pojedynczego podzbioru jest takie same (równe $\frac{1}{2^n}$) i że wybory podzbiorów $A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi.

27. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, przy czym zachodzi $AB = CD = EF = 2BC = 2DE = 2FA$. Wyznacz obwód sześciokąta $ABCDEF$, wiedząc, że $AD = 8$.

28. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych $(a, b)$, dla których $a + b$ ma cyfrę jedności 3 (w systemie dziesiętnym), $a - b$ jest liczbą pierwszą, a $ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

29. Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oznacza permutację liczb $1, 2, \ldots, n$. Dla ilu takich permutacji zachodzi $a_k \geq k-2$ dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, n$?

---

30. Na szachownicy $n \times n$ położono 1013 kostek domino w taki sposób, że każda z nich zakrywa dokładnie dwa pola szachownicy. Żadne dwie kostki się nie pokrywają ani nie dotykają (nawet narożnikami). Znaleźć najmniejsze $n$, dla którego taki układ kostek jest możliwy.

---

31. W trójkącie $ABC$ środkowe poprowadzone na boki $AC$ i $BC$ są prostopadłe. Wiemy, że $BC = 8$, $AC = 6$. Oblicz $AB$.

---

32. Zdefiniujmy działanie $\circ$ w następujący sposób: $a \circ b = \frac{a+b}{ab+4}$. Oblicz

$$((((2026 \circ 2025) \circ 2024) \circ \ldots \circ 2) \circ 1) \circ 0$$

---

33. W trójkącie prostokątnym $ABC$ przyprostokątne $AB$ i $AC$ mają długości odpowiednio 6 i 8. Na przeciwprostokątnej $BC$ zbudowano kwadrat $BXYC$, na zewnątrz trójkąta $ABC$. Oblicz $AX$.

---

34. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$\sin(\pi x) = \frac{x}{100}$$

---

35. Hubert, Jacek i Alicja rzucają uczciwą monetą (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła i reszki jest takie samo) i grają w następującą grę: pierwszy rzuca Hubert, następnie Jacek, potem Alicja, a potem znowu Hubert i tak dalej. Pierwsza osoba, która wyrzuci orła, wygrywa. Jakie jest prawwdopodobieństwo wygranej Jacka?

36. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą $k$, dla której nierówność $2x + 3y \leqslant k\sqrt{x^2 + y^2}$ jest prawdziwa dla dowolnych $x, y$ rzeczywistych.

---

37. Wyznacz, ile jest trójek liczb naturalnych $(a, b, c)$, które spełniają układ równań

$$\begin{aligned} abc + 2025 &= ab + bc + ca \\ a + b + c &= 2026 \end{aligned}$$

---

38. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o długości krawędzi 2. Płaszczyzna $p$ równoległa do krawędzi $AB$ i $CD$ przechodząca przez środek krawędzi $AC$ dzieli czworościan na dwie części. Znajdź pole powierzchni jednej z tych części.

---

39. We wszystkie pola tabelki $10 \times 10$ wpisujemy kółka i krzyżyki w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowała się nieparzysta liczba krzyżyków. Na ile sposobów możemy tak wypełnić naszą tabelkę?

---

40. Znajdź największe $n$ naturalne takie, że $2^n | (3^{4096} - 1)$.

---

41. Wypukły sześciokąt o bokach długości $2, 2, 7, 7, 11, 11$ jest wpisany w okrąg. Ile wynosi promień tego okręgu?

---

42. W pudełku znajdują się kolorowe kule, przy czym jest tyle samo kul każdego koloru. Dorzucamy do pudełka 20 kul jednego koloru, innego niż wszystkie kule, które do tej pory mieliśmy w pudełku. Okazuje się, że przy losowaniu dwóch kul bez zwracania, prawdopodobieństwo, że będą to kule tego samego koloru, wynosi tyle samo, ile przed dorzuceniem tych 20 kul do pudełka. Ile kul było w pudełku na początku?

43. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$(5 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (12 + 2\sin(x) - \sin(y))^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

44. Liczby rzeczywiste $a, b, c$ spełniają równania $a - 7b + 8c = 4$ i $8a + 4b - c = 7$. Jakie wartości może przyjmować wyrażenie $a^2 - b^2 + c^2$?

45. Znajdź liczbę naturalną $n$ spełniającą

$$\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{4}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{5}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{4}$$

46. Mikołaj i Natan grają w następującą grę: rozpoczynają ze zbiorem liczb $\{0, 1, 2, \ldots, 1024\}$. Najpierw Mikołaj usuwa ze zbioru wybrane $2^9$ liczb, następnie Natan usuwa $2^8$ z pozostałych liczb, potem Mikołaj usuwa $2^7$ liczb itd., aż do momentu, w którym Natan usuwa jedną liczbę, i w zbiorze zostają dokładnie dwie liczby. W tym momencie gra się kończy i Mikołaj musi zapłacić Natanowi tyle złotych, ile wynosi wartość bezwzględna z różnicy dwóch pozostałych w zbiorze liczb. Ile złotych dostanie Natan, jeżeli obaj grali najlepszy możliwy dla siebie sposób?

47. Dziewięciokąt foremny $ABCDEFGHI$ jest wpisany w okrąg $\omega$ o środku $O$. Niech $M$ będzie środkiem krótszego łuku $AB$ okręgu $\omega$, $P$ środkiem $MO$, a $N$ środkiem $BC$. Proste $OC$ i $PN$ przecinają się w punkcie $Q$. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle NQC$.

48. Przez $S$ oznaczymy zbiór wszystkich trójek liczb naturalnych $(a, b, c)$ będących rozwiązaniami równania $a + b + c = 26$. Oblicz

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk$$

49. Tomek pomyślał sobie o trzech dodatnich liczbach całkowitych $a, b, c$, z których dwie sumowały się do 800. Napisał w zeszycie liczby $a, b, c, a + b - c, b + c - a, c + a - b, a + b + c$ i zdał sobie sprawę, że wszystkie z nich są liczbami pierwszymi. Ile wynosi różnica między największą a najmniejszą z liczb zapisanych przez Tomka w zeszycie?

50. Wewnątrz równoramiennego trójkąta $ABC$, w którym $AB = AC$ i $\sphericalangle BAC = 99,4^\circ$, dany jest punkt $D$ taki, że $AD = BD$ i $\sphericalangle BAD = 19,7^\circ$. Oblicz $\sphericalangle BDC$.